27/10/2020

Οι ακολουθίες είναι το βασικότερο εργαλείο για να μελετήσουμε την έννοια του ορίου (συν/σεων) σε μετρικούς χώρους (όπως είναι ο $\mathbb{R}^n$)

Σ έννοια ορίου συν/σης → συνέχεια συν/σης

→ διαφορισιμότητα συν/σης

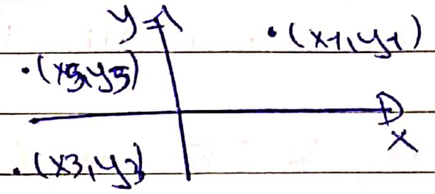
→ ολοκληρωσιμότητα — // —

Ανάλυση: τα μαθήματα που στηρίζονται στις / ασχολούνται έννοιες του ορίου]. Επίσης είναι ένα άλλο εργαλείο

Ακολουθία = απεικόνιση από το $\mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^n$

στον $\mathbb{R}^n$ δηλ. $\forall\ \nu \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ αντιστοιχούμε ένα μοναδικό $\bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$.

$\boxed{n=2}$



Τη συμβολίζουμε $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ και τα $\bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$ είναι οι όροι της

Λέμε ότι μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει, αν $\exists\ \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}\ (\text{και μάλιστα } \in [0,\infty))} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

και πιο συγκεκριμένα λέμε τότε ότι η $\bar{x}_\nu$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$, συμβολικά $\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x}_0$ ή πιο απλά $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$

και ~~[illegible]~~ το $\bar{x}_0$ ονομάζεται όριο της ακολουθίας και όπως θα δούμε είναι μοναδικό (αν η ακολ. συγκλίνει) και γι' αυτό το συμβολίζουμε και με:

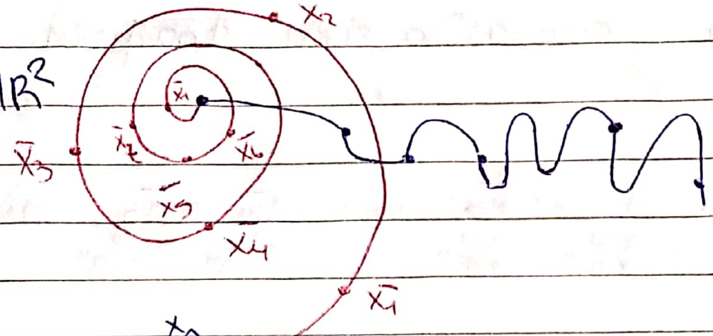
$$\bar{x}_0 = \lim_{\nu\to\infty} \bar{x}_\nu$$

Scanned with CamScanner

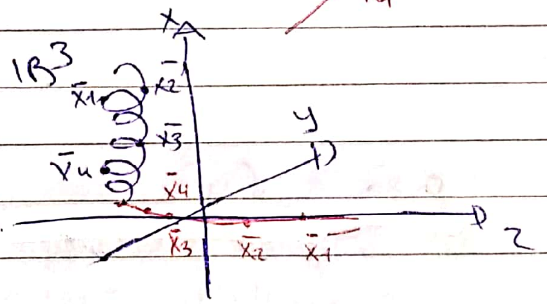
Διαισθητικά: η ακολ. $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$ αν η ακολουθία των αποστάσεων των όρων της ακολ. από το $\bar{x}_0$ συγκλίνει στο 0
(δηλ. ακόμα πιο απλά, όταν οι όροι της ακολ. πλησιάζουν το $\bar{x}_0$, όλο και πιο πολύ για $\nu \to \infty$)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ακολ. συγκλίνει στο $\bar{x}_0$, όταν η απόσταση από το $\bar{x}_0$ μηδενίζεται, ΟΠΟΣ (ΔΗΛ. ΜΕ ΟΠΟΙΟ ΤΡΟΠΟ) ΚΑΙ ΝΑ ΠΛΗΣΙΑΖΟΥΝ ΤΑ $\bar{x}_\nu$ ΤΟ $\bar{x}_0$

π.χ. στον $\mathbb{R}^2$



π.χ. στον $\mathbb{R}^3$



Χρήσιμες συμβουλές: Πάντα το καλύτερο για να μελετήσω αν μια ακολουθία συγκλίνει σ' ένα όριο, είναι να μελετήσω την ακολουθία $\bar{x}_\nu - \bar{x}_0$ και να δείξω ότι: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$

π.χ. Δείξτε ότι η ακολ. $(x_\nu, y_\nu) = \left(26 + \frac{1}{\nu}, 27 + \sin\frac{1}{\nu}\right)$, $\nu \in \mathbb{N}$
συγκλίνει στο $(x_0, y_0) = (26, 27)$

Πράγματι: $\|(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0)\| = \left\|\left(\frac{1}{\nu}, \sin\frac{1}{\nu}\right)\right\| =$

$$= \left(\frac{1}{\nu^2} + \sin^2\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)^{1/2} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Από τον ορισμό: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \; :\Leftrightarrow \; \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$

Έχουμε: (από τον ορισμό σύγκλισης ακολουθιών)

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$$

Βασικές προτάσεις: (Θέματα εξετάσεων, πολλές είναι απλά, τα έχουμε ξανά δει και θα τα ξαναδούμε)

• Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.
Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Πρόταση: Έστω $\underbrace{\bar{x}_\nu}_{\in\mathbb{R}^k} \to \underbrace{\bar{x}_0}_{\in\mathbb{R}^k}$ και $\underbrace{\bar{y}_\nu}_{\in\mathbb{R}^k} \to \underbrace{\bar{y}_0}_{\in\mathbb{R}^k}$ και $\underbrace{a_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to \underbrace{a}_{\in\mathbb{R}}$

και $\underbrace{b_\nu}_{\in\mathbb{R}} \to \underbrace{b}_{\in\mathbb{R}}$

Τότε:

$$\underbrace{\underbrace{a_\nu \bar{x}_\nu}_{\in\mathbb{R}^k} + \underbrace{b_\nu \bar{y}_\nu}_{\in\mathbb{R}^k}}_{\in\mathbb{R}^k} \to \underbrace{a\bar{x}_0 + b\bar{y}_0}_{\in\mathbb{R}^k}$$

Αποδ: ΘνΔο: $\|a_\nu \bar{x}_\nu + b_\nu \bar{y}_\nu - (a\bar{x}_0 + b\bar{y}_0)\| \to 0$

ΒΑΣΙΚΟΤΕΡΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ: ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ (ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ) ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ

ΜΕ ΑΛΛΑ ΛΟΓΙΑ: προσπαθούμε να γράψουμε από πάνω την ακολ. που έχουμε με κάποια ακολ. που ξέρουμε ότι συγκλίνει στο μηδέν [Η ακολ. νόρμων πάντα φράσσεται από κάτω από το μηδέν]

$\longrightarrow$

Εδώ: $\qquad\qquad$ Ο: Τριγωνική ανισότητα

$$0 \le \|a_\nu \bar{x}_\nu + b_\nu \bar{y}_\nu - a\bar{x}_0 - b\bar{y}_0\| = \|(a_\nu - a)\bar{x}_\nu + a(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) + (b_\nu - b)\bar{y}_\nu + b(\bar{y}_\nu - \bar{y}_0)\| \overset{O}{\le} \|(a_\nu - a)\bar{x}_\nu\| + \|a(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0)\| + \|(b_\nu - b)\bar{y}_\nu\| + \|b(\bar{y}_\nu - \bar{y}_0)\| \to 0 \text{ (βλ. ΑΠ1)}$$

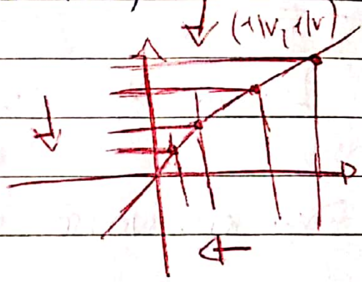
$$\|(a_\nu - a)\bar{x}_\nu\| = |a_\nu - a| \cdot \underbrace{\|\bar{x}_\nu\|}_{\le D} \qquad = |a|\, \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$$

$$\|(b_\nu - b)\bar{y}_\nu\| = |b_\nu - b|\, \|\bar{y}_\nu\| \le D$$

$$\|b(\bar{y}_\nu - \bar{y}_0)\| = |b|\, \|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\|$$

Χρήσιμη πρόταση: $\underbrace{\bar{x}_\nu}_{\in \mathbb{R}^n} = (\underbrace{x_\nu^{(1)}}_{\in \mathbb{R}}, \dots, x_\nu^{(n)}) \xrightarrow{\nu \to \infty} \underbrace{\bar{x}_0}_{\in \mathbb{R}^n} = (\underbrace{x_0^{(1)}}_{\in \mathbb{R}}, \dots, x_0^{(n)})$

$\Leftrightarrow \forall\, i = 1, \dots, n: \underbrace{x_\nu^{(i)}}_{\in \mathbb{R}} \to \underbrace{x_0^{(i)}}_{\in \mathbb{R}}$ (στον $\mathbb{R}$)



Εικόνα: "Νορμάλ" αφού $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$

Συνεπώς: Για να ελέγξω αν μία ακολ. στον $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει πρέπει και αρκεί για κάθε συντεταγμένη η αντίστοιχη ακολουθία να συγκλίνει (στον $\mathbb{R}$)

Απόδ: ($\Rightarrow$): $\forall\, i = 1, \dots, n: 0 \le |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \le \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$

$\to 0 \qquad \to 0$

Θεωρ. ισοσ. στον $\mathbb{R}$

($\Leftarrow$): Έχουμε: $\forall\, i = 1, \dots, n: 0 \le |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \to 0$ στον $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2 \to 0 \overset{\text{στον}}{\underset{\mathbb{R}}{\Rightarrow}} \sum_{i=1}^{n} |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}|^2 \overset{\text{στον}}{\underset{\mathbb{R}}{\to}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|^2}}_{= \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|} \to 0$$

Η έννοια της ακολ. Cauchy γενικεύεται από τον $\mathbb{R}$ στον $\mathbb{R}^n$, $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ ακολ. Cauchy $:\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu, \mu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$

(αντί για: $|x_\nu - x_0|$ που έχουμε στον $\mathbb{R}$)

και ισχύει:

Πρόταση: $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει (σε κάποιο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow$ $(\bar{x}_\nu)$ είναι ακολ. Cauchy

Αποδ.: βλ. σημειώσεις

Θ. BW στον $\mathbb{R}^n$: Κάθε φραγμένη ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$

$[: \Leftrightarrow \exists r > 0 : \|\bar{x}_\nu\| < r \; \forall \nu \in \mathbb{N}]$

$\Leftrightarrow \bar{x}_\nu \in B(0, r)$

έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: $\bar{x}_{k_\nu} \subset \bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)})$

$= (x_{k_\nu}^{(1)}, \ldots, x_{k_\nu}^{(n)})$

Απόδειξη: $\forall i = 1, \ldots, n : |x_\nu^{(i)}| < r \; \forall \nu \in \mathbb{N}$

$(x_{k_\nu}^{(1)}, \ldots, x_{k_\nu}^{(n)})$ δηλ. $x_\nu^{(i)} \subset \mathbb{R}$ (για σταθερό $i = 1, \ldots, n$) είναι φραγμένη

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν τελειώσαμε, λέγοντας απλώς ότι αφού ισχύει (από τον ΑΠΕΗ) $\forall\, i=1,\dots,n$ θα ισχύει και για την ακολ. $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$

Π.χ. Μπορούμε να έχουμε στον $\mathbb{R}^2$
$\|(x_\nu, y_\nu)\| \leq r \Rightarrow |x_\nu| \leq r,\ |y_\nu| \leq r$ και να συγκλίνουν οι ακολουθίες x_{2k-1} $(k\in\mathbb{N})$ και y_{2k} $(k\in\mathbb{N})$. Εμείς όμως δεν έχουμε διανύσματα x_{2k-1}, y_{2k}
[είναι διαφορετικά]

αποδ: BW στον $\mathbb{R}^n$: $\forall\, i=1,\dots,n$: $(x_\nu^{(i)} \subset \mathbb{R})$

	$i=1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu=1$	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$							
2	$x_2^{(1)}$	$\Rightarrow x_2^{(2)}$	$\dots$						
3	$x_3^{(1)}$	$x_3^{(2)}$							
4	$x_4^{(1)}$	$x_4^{(2)}$							
5	$x_5^{(1)}$	$x_5^{(2)}$							
6	$x_6^{(1)}$	$x_6^{(2)}$							
7	$x_7^{(1)}$	$x_7^{(2)}$							
8	$x_8^{(1)}$	$x_8^{(2)}$							
9	$x_9^{(1)}$	$x_9^{(2)}$							

↑ φραγμένη

Αφού $x_\nu^{(1)}$ φραγμένη $\xrightarrow[\text{στο } \mathbb{R}]{BW}$
$\Rightarrow \exists\, x_{k_\nu}^{(1)}$ που συγκλίνει
Άρα κοιτάω τώρα για $\nu=2$ μόνο την αντίστοιχη υπακολ. $(x_{k_\nu}^{(2)})$, που είναι και αυτή φραγμένη $\xrightarrow[\mathbb{R}]{BW \text{ στον}}$

$\Rightarrow \exists\, (x_{k_{\lambda_\nu}}^{(2)})$ που συγκλίνει και τότε ως υπακολ. συγκλίνουσας ακολουθίας θα συγκλίνει και η $(x_{k_{\lambda_\nu}}^{(1)})$

Συνεπώς, βρήκαμε μία υπακολουθία δεικτών (k_{λ_ν}) έτσι ώστε και η $(x_{k_{\lambda_\nu}}^{(1)})$ και η $(x_{k_{\lambda_\nu}}^{(2)})$ να συγκλίνουν
είναι τα ίδια

Μετά κοιτάμε για $i=3$ μόνο τους όρους $(x_{k_{\lambda_\nu}}^{(3)})$ και είναι πάλι φραγμένη ακολ. και βρίσκουμε μία συγκλίνουσα

υπακολ. $(x^{(3)}_{k_{\ell_m}})$ και τότε θα συγκλίνουν [υπ$_{(2)}$
υπακολ. συγκλ. υπακολ.] και οι $(x^{(1)}_{k_{\ell_m}}, x^{(2)}_{k_{\ell_m}})$

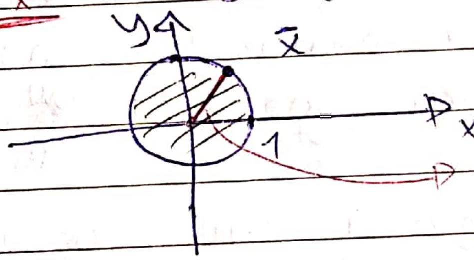
Επειδή έχουμε πεπερασμένο πλήθος συντ/νων μετά από n – επιλογές υπακολουθιών θα έχουμε βρεί μία υπακολουθία δεικτών $(k_\nu) \subset (\nu)$, έτσι ώστε $\forall\, i = 1, \dots, n$ $(x^{(i)}_{k_\nu})$ συγκλίνει (σε κάποιο $(x_0^{(i)})$) [είναι το ίδιο για όλα τα i]

Οι ακολουθίες μας βοηθάνε να καταλάβουμε καλύτερα κάποιες τοπολογικές έννοιες υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$:

[Η αρίθμηση των προτάσεων είναι των Σημειώσεων]

Προτ. 1.45: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ σ.σ. ενός $U \subset \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

Π.χ. $U = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \partial B(\bar{0}, 1)$ $n = 2$:



εδώ βρίσκονται τα $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

Τότε: υπάρχει π.χ. το $\bar{x}_\nu = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\bar{x}$, $\nu \in \mathbb{N}$

με $\bar{x}_\nu \in U$ και $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

Πρόταση 1.4.6: $\bar{x} \in \bar{U}$ $\Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$
κλειστή θήκη ενός
$U \subset \mathbb{R}^n$

π.χ. Στο προηγούμενο παραδ. είδαμε ότι:
$\bar{x} \in \overline{B(\bar{0},1)} = \bar{B}(0,1)$
κλειστή ... κλειστή μπάλα
θήκη ανοικτής μπάλας

Πρόταση 1.4.7 (S.O.S) $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall\ \bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in U$

Πρόταση 1.4.8 $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$,
$\exists\ (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x} \in U : \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$